

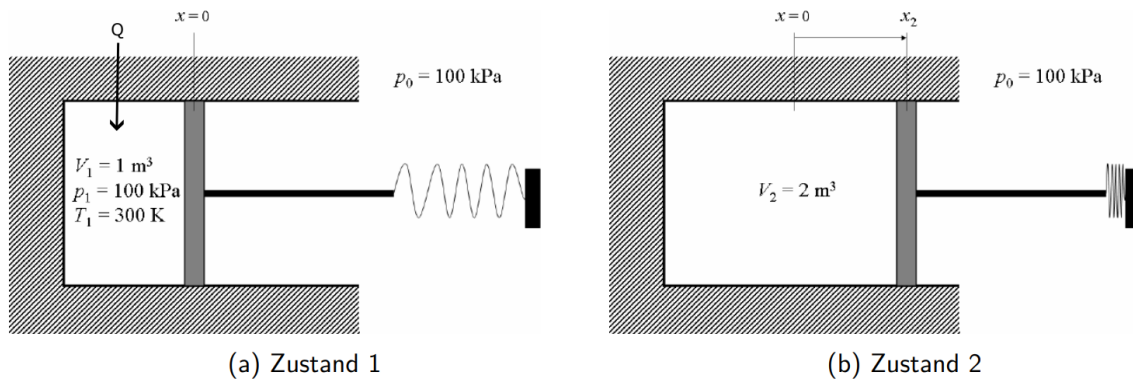
Vorrechenübung

Aufgabe 3.1 ●●● ↗ Prüfungslevel Feder-Kolben-System ideales Gas

In einem Kolben-Zylinder-System befindet sich Wasserstoff (Volumen $V_1 = 1 \text{ m}^3$, Druck $p_1 = 100 \text{ kPa}$, Temperatur $T_1 = 300 \text{ K}$, ideales Gas). In diesem Anfangszustand berührt eine Feder von aussen den Kolben, ohne eine Kraft auf den Kolben auszuüben.

Je nach Auslenkung der Feder x ist die Federkraft $F = k \cdot x$, mit der Federkonstante $k = 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$. Die Querschnittsfläche des Kolbens beträgt $A = 0.8 \text{ m}^2$.

Dem Wasserstoff wird Wärme zugeführt, was zu einer Expansion mit einer Verdoppelung des Volumens führt. Der Umgebungsdruck beträgt $p_0 = 100 \text{ kPa}$. Der Kolben läuft reibungsfrei.



a) Bestimmen Sie die Masse, den Enddruck und die Endtemperatur des Wasserstoffs.

Aus ZF Ideales Gas ($pV = n\bar{R}T$ $pv = RT$ $pV = mRT$)

Masse: p_1, V_1, T_1 geg.

$$R = \frac{\bar{R}}{M_{H_2}} = \frac{8,374 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}}{2,016 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 4,124 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

↑
TAB A-1

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{100 \text{ kPa} \cdot 1 \text{ m}^3}{4,124 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}} = \underline{\underline{0,08082767 \text{ kg}}}$$

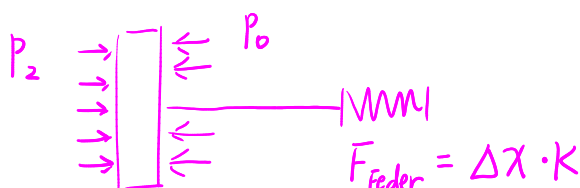
M.L. = 0,0808 kg ✓

Enddruck, End Temp.

$$V_2 = 2V_1 = 2 \text{ m}^3$$

T_2, p_2 fehlt, IG Gleichung nicht lösbar

Mechanik Approach um p_2 zu berechnen?



GGW?

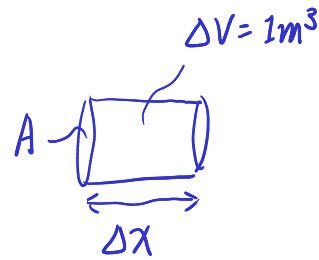
Promising Lösungsansatz!
Let's try it out

GGW:

$$P_2 \cdot A = P_0 \cdot A + \Delta x \cdot K$$

$$\Delta V = A \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{\Delta V}{A} = 1,25 \text{ m}$$



$$P_2 = P_0 + \frac{\Delta x \cdot K}{A} = 100 \text{ kPa} + \frac{1,25 \text{ m} \cdot 30 \text{ kN/m}}{0,8 \text{ m}^2} = \underline{\underline{146,875 \text{ kPa}}}$$

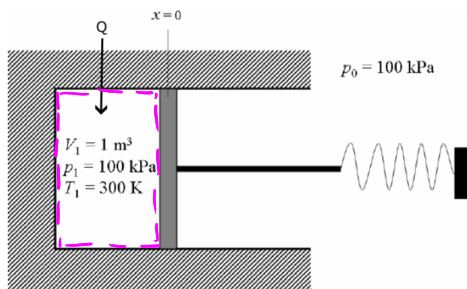
M.L. 1,469 bar ✓

$$P_2 V_2 = m R T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{m R} = \frac{146,875 \text{ kPa} \cdot 2 \text{ m}^3}{0,0808 \text{ kg} \cdot 4,124 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = \underline{\underline{881,55 \text{ K}}}$$

M.L. 881,25 K ✓

b) Bestimmen Sie die totale vom System geleistete Arbeit.

① Systemgrenz und Ansatz?



(a) Zustand 1

geschlossenes Sys.

1.1 Nützliche Formel für geschlo. Sys.?

AusZF

- Geschlossenes System an einem Kolben:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j \dot{Q}_j - \sum_n \dot{W}_{V,n}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \sum_j Q_j - \sum_n W_{V,n}$$



Spezifische Volumenarbeit
(reversible Änderung des Systemvolumens)

$$w_{V,12}^{\text{rev}} = \frac{W_{V,12}^{\text{rev}}}{m} = \int_1^2 p dv$$

Umformung nach

$$W_{V,12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Herleitung
siehe
Notizen von
Woche 3.

Überlegen: V_1, V_2 geg. $p = \text{const}$?

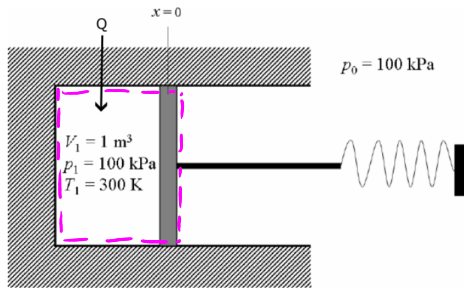
Nein, Nach GGW mit Druck P auf linker Seite,
und Federkraft $F = x \cdot K$ auf rechter Seite,

$\Rightarrow P$ ist eine Func. von x , $P \neq \text{const.}$

PdV trotzdem lösbar, aber schwer mit $\int_{V_1}^{V_2} P(x) dV$

Vgl. mit ML

Andere Ansatz?



(a) Zustand 1

Sys. Grenze nun an Umgebung

Somit kann Umgebungsdruck $P_0 = \text{const.}$ genutzt werden um Volumenarbeit

$W_{V,12}$ zu berechnen.

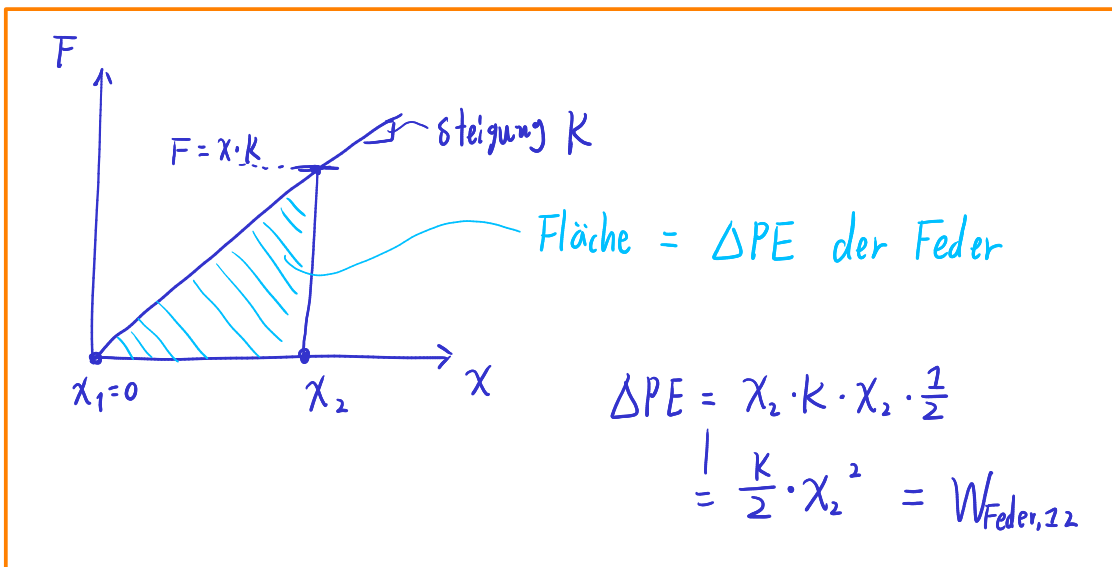
⚠ Ausser Volumenarbeit, Sys. leistet auch zusätzliche Arbeit gegen Feder

Somit soll $W_{\text{tot}} = W_{V,12} + W_{\text{Feder},12}$

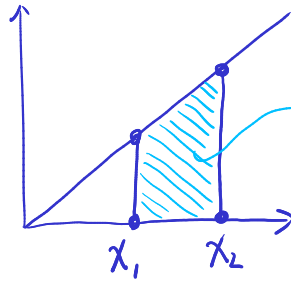


Die Arbeit, die gegen Feder geleistet ist geht zu ΔPE der Feder

Formel für Federarbeit



Achtung: Falls Feder vorgespannt ist,



$$\Delta PE = \frac{k}{2} \chi_2^2 - \frac{k}{2} \chi_1^2 = \frac{k}{2} [\chi_2^2 - \chi_1^2]$$

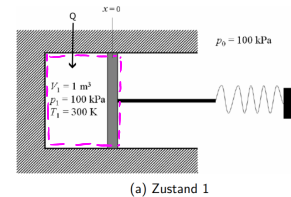


$$W_{\text{tot}} = W_{V,12} + W_{\text{Feder},12}$$

$\uparrow$
 $p_0 = \text{const.}$

PdV leicht zu berechnen

$\nwarrow$ kann man gut berechnen ✓



✓ Diese Systemgrenze
mit dem Ansatz sieht
gut aus

Brauchen wir Energiebilanzgleichung? $\Rightarrow$ Nein.

$\Rightarrow$ man kann schon mit Ansatz $\searrow$

$$\underline{W_{\text{tot}}} = W_{V,12} + W_{\text{Feder},12}$$

die gesuchte W_{tot} berechnen, dann braucht ihr
1. HS nicht mehr aufstellen.

② Lösen

$$W_{\text{tot}} = W_{V,12} + W_{\text{Feder},12}$$

Sys $\Rightarrow \Rightarrow$ ~~W~~ ~~W~~ ~~W~~ ~~W~~

sys. leistet Aktive Arbeit,
gibt Energie raus und steckt in PE

$$\text{von Feder} \Rightarrow W_{\text{Feder},12} = (+) \\ = \frac{k}{2} x_2^2$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} P_0 dV + \frac{k}{2} x_2^2$$

$$\leftarrow x_2 = \Delta x = 1,25 \text{ m aus a)}$$

$$= P_0 [V_2 - V_1] + \frac{k}{2} x_2^2 = 100 \text{ kPa} [2 \text{ m}^3 - 1 \text{ m}^3] + \frac{1}{2} \cdot 30 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot [1,25 \text{ m}]^2$$

$$\left[\text{kPa} \right] \cdot \left[\text{m}^3 \right] = \left[\text{kJ} \right] \quad \left[\text{KN} \right] \cdot \left[\text{m} \right] = \left[\text{kJ} \right]$$

$$= \underline{\underline{123,4375 \text{ kJ}}}$$

ML. 123,44 kJ ✓

c) Bestimmen Sie den Anteil der Arbeit, der gegen die Feder geleistet wird.

$$W_{\text{tot}} = 123,4375 \text{ kJ} \quad \text{aus b)}$$

$$W_{\text{Feder},12} = \frac{k}{2} x_2^2 = 23,4375 \text{ kJ} \quad \text{aus b)}$$

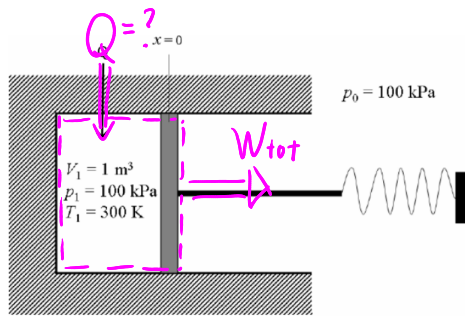
$$\frac{W_{\text{Feder},12}}{W_{\text{tot}}} = \frac{23,4375 \text{ kJ}}{123,4375 \text{ kJ}} = \underline{\underline{18,9873 \%}}$$

ML. 19 % ✓

d) Bestimmen Sie die Wärme, die dem System zugeführt werden muss, um die angegebene Expansion zu ermöglichen.

① Sys.-grenze, Ansatz?

$$Q = ? \quad W_{tot} = 123,4375 \text{ kJ}$$



(a) Zustand 1

Geschlossenes Sys.

1.HS nun nützlich

② 1.HS $\Delta E = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE = Q - W_{tot}$

③ Vereinfachung

$$\Delta E = \Delta U + \cancel{\Delta KE} + \cancel{\Delta PE} = Q - W_{tot}$$

Ruhe Für Gas, Kolben = 0

$$\Delta U_{H_2} + \cancel{\Delta U_{Kolben}} = Q - W_{tot}$$

Annahme, Kolben adiabat

$$\Delta U_{H_2} = Q - W_{tot}$$

④ Lösen $\Delta U_{H_2} = Q_{12} - W_{tot}$

$$m_{H_2} (u_2 - u_1) = Q_{12} - W_{tot}$$

Recall Trick / Tipp von letzter Übungsstunde

Für IG, falls möglich, immer TAB-Wert für $u(T)$, $h(T)$.

Hier gibt es aber keine TAB-Wert für H_2 !

$\Rightarrow$ dann müsst ihr IG $\rightarrow$ PG Approximation machen.

Vorgehen

ges : $u^{ig}(T)$? $\rightarrow$ TAB - Wert vorhanden ? $\Rightarrow \checkmark$ TAB wert nutzen

Falls $C_v = \dots = \text{const.}$ | geg. ist ,
 $C_p = \dots = \text{const.}$

bedeutet: Gas ist perfekt

Direkt Formel | $\Delta u = C_v \cdot \Delta T$ | verwenden
 $\Delta h = C_p \cdot \Delta T$

$\times$

$\Downarrow$

$IG \rightarrow PG$ Approx.

$u^{ig}(T_2) = \dots$

- ① Mittel Temp. $\bar{T}$ zw. Zustand 1 : T_1 , 2 : T_2 finden
- ② C_v oder C_p @ $\bar{T}$ auf TAB suchen, ggf. lerp. nutzen
 $\uparrow$ für innere Energie u $\uparrow$ für Enthalpie h

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \Delta U &= m \cdot \Delta u^{pg} = m \cdot [u_2^{pg}(T_2) - u_1^{pg}(T_1)] \\ &= m \cdot C_v^{pg} (T_2 - T_1) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad C_v^{pg} @ \bar{T} \end{aligned}$$

Vgl. AusZF

$$u^{pg}(T_2) - u^{pg}(T_1) = c_v^{pg}(T_2 - T_1)$$

$m_{H_2}(u_2 - u_1)$ für H_2 , keine TAB-Wert für $u(T)$

$C_v = \text{const.}$ ist auch nicht geg. $\Rightarrow IG \rightarrow PG$ Approx.

$$\textcircled{1} \quad \bar{T} = ? \quad T_1 = 300 \text{ K} \quad T_2 = 881,55 \text{ K}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = 590,775 \text{ K}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{für } u \text{ ist } C_v @ \bar{T} \text{ gebraucht, } C_v @ \bar{T} = ?$$

$$\bar{T} = 590,775 \text{ K} \text{ liegt zw. } 550 \text{ K} \text{ und } 600 \text{ K}$$

$$\text{lerp.} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

	$C_v [\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}]$	$T [\text{K}]$	
y_1	10,405	550	x_1
$y \rightarrow$	10,4188	590,775	x
y_2	10,422	600	x_2

Aus
TAB-A20

$$C_v @ 590,775 \text{ K} = 10,4188 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

③

$$\Delta U_{H_2} = m_{H_2} \Delta u = m_{H_2} [u_2^{pg} - u_1^{pg}]$$

$$= m_{H_2} \cdot c_v \cdot [T_2 - T_1]$$

Aus ZF

$$u^{pg}(T_2) - u^{pg}(T_1) = c_v^{pg}(T_2 - T_1)$$

$$= 0,08082767 \text{ kg} \cdot 10,4188 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot [881,55 \text{ K} - 300 \text{ K}]$$

$$\Delta U_H = 489,739 \text{ kJ}$$

ML. 489,59 kJ (in ML. bisschen anders gelöst)

$$\frac{489,739 - 489,59}{489,59} = 0,03\% < 1\% \quad \text{Antwort giltig } \checkmark$$

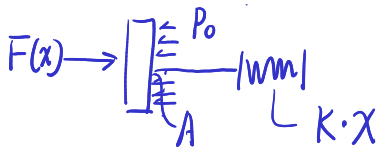
$$\Delta U_{H_2} = Q_{12} - W_{\text{tot}}$$

$$\Rightarrow Q_{12} = \Delta U_{H_2} + W_{\text{tot}} = 489,739 \text{ kJ} + 123,4375 \text{ kJ} = \underline{\underline{613,1765 \text{ kJ}}}$$

ML. 613,03 kJ $\checkmark$

e) Zeichnen Sie den Prozess im p - V -Diagramm.

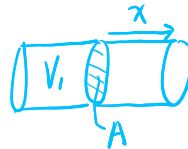
Kraft GGW



$$F(x) = A \cdot P_0 + Kx \quad | \cdot A^{-1}$$

$$P(x) = P_0 + \frac{Kx}{A}$$

Abhängigkeit zw x , V ?



$$V(x) = V_1 + A \cdot x$$

$$V(x) - V_1 = Ax$$

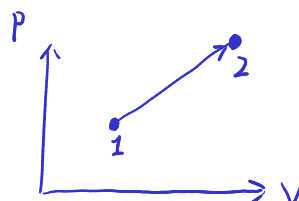
$$x = \frac{V - V_1}{A}$$

$$P = P_0 + \frac{K}{A^2} (V - V_1)$$

$$P = \frac{K}{A^2} \cdot V + P_0 - \frac{KV_1}{A^2}$$

Gerade linier Func.

$\Rightarrow$



Diese Ansatz geht nicht

Ich hatte auch das probiert,

Polytropes
Temperaturverhältnis

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}$$

Um Exponente n ausrechnen

$$\frac{881,25}{300} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \log_{0,5} \left(\frac{881,25}{300} \right) = n-1 = -1,5545$$

$$n = -0,5545$$

$$pV^n = \text{const}$$

$$pV^{-0,5545} = C \quad | \cdot V^{0,5545}$$

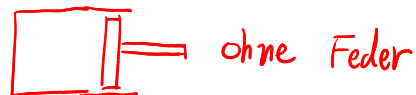
$$p = C \cdot V^{0,5545} \Rightarrow \sqrt{\text{Funktion?}} \quad \text{X}$$

So genau weiss ich auch nicht wieso, wegen der Feder hat der Haupt TA gemeint.

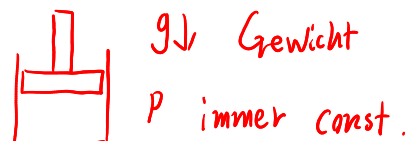
Hab Prof gefragt:

Mit Feder:
lass es lieber mechanisch
lösen,

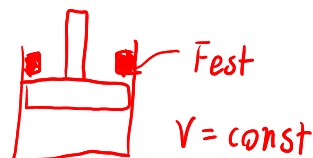
$pV^n = \text{const}$ gilt bei



oder



oder



...